Άσκηση.

Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$, τότε:

i) $\inf(-f) = -\sup f$ και $\sup(-f) = -\inf f$

ii) $(\forall x \in A): f(x) \le g(x) \Rightarrow \begin{cases} \sup f \le \sup g \\ \inf f \le \inf g. \end{cases}$

iii) $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$

iv) $\sup(f+g) \ge \sup f + \inf g$

v) $\sup(f+c) = \sup f + c$, $c \in \mathbb{R}$

vi) $\sup(|c| f) = |c| \cdot \sup f$, $c \in \mathbb{R}$

vii) $\inf(f+g) \ge \inf f + \inf g$

viii) $\inf(f+g) \le \inf f + \sup g$

ix) $\inf(f+c) = \inf f + c$

x) $\inf(|c| f) = |c| \cdot \inf \ldots$, $c \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

i) $(\forall x \in A)$: $f(x) \le \sup f \Rightarrow -f(x) \ge -\sup f \Rightarrow -\sup f$ κ.φ $(-f)$

άρα $\inf(-f) \ge -\sup f$ ①

$(\forall x \in A)$: $-f(x) = (-f)(x) \ge \inf(-f) \Rightarrow f(x) \le -\inf(-f) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\inf(-f)$ α.φ $f$

άρα $\sup f \le -\inf(-f) \Rightarrow \inf(-f) \le -\sup f$ ②

Από ①+② ισχύει η (i)

$(\forall x \in A)$: $\inf f \le f(x) \Rightarrow -f(x) \le -\inf f \Rightarrow -\inf f$ αφ. $(-f)$

άρα $\sup(-f) \ge -\inf f$ ①′

$(\forall x \in A)$: $-f(x) = (-f)(x) \le \sup(-f) \Rightarrow f(x) \ge -\sup(-f) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\sup(-f)$ κφ $f$

άρα $\inf f \ge -\sup(-f) \Rightarrow -\inf f \le \sup(-f)$ ②′

Από ①′+②′ ισχύει η (i)

ii) $(\forall x\in A)$: $g(x) \le \sup g \Rightarrow f(x) \le \sup g \Rightarrow \sup g$ α.φ $f$

άρα, $\sup f \le \sup g$.

$(\forall x\in A)$ $\inf f \le f(x) \Rightarrow \inf f \le g(x) \Rightarrow \inf f$ κφ $g$

άρα, $\inf f \le \inf g$.

iii) $(\forall x\in A)$ $\left.\begin{cases} f(x) \le \sup f \\ g(x) \le \sup g \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)+g(x) \le \sup f + \sup g \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sup f + \sup g)$ α.φ της $(f+g)$.

άρα, $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$

iv) $(\forall x\in A)$: $\sup f = \sup\big((f+g)-g\big) \overset{(iii)}{\le} \sup(f+g) + \sup(-g) \overset{(i)}{=}$

$= \sup(f+g) - \inf g \Rightarrow \sup f = \sup(f+g) - \inf g \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(f+g) = \sup f + \inf g$.

v) Από (iii) $\sup(f+c) \le \sup f + \sup c = \sup f + c$

Από (iv) $\sup(f+c) \ge \sup f + \inf c = \sup f + c$

Άρα ισχύει η (v)

vi) Για $c=0$ ισχύει.

Για $c\neq 0$, $(\forall x\in A)$: $|c|\cdot f(x) \le |c|\cdot \sup f \Rightarrow$

$\Rightarrow (|c|\cdot f)(x) \le |c|\cdot \sup f \Rightarrow |c|\cdot\sup f$ α.φ της $(|c|\cdot f)$

άρα, $\sup(|c|\cdot f) \le |c|\cdot \sup f$ ⊛

Ενώ, $f = \frac{1}{|c|}|c|\cdot f \Rightarrow \sup f = \sup\left(\frac{1}{|c|}\cdot|c|\cdot f\right) =$

$= \sup\left(\frac{1}{|c|}\cdot(|c|\cdot f)\right) \overset{⊛}{\le} \frac{1}{|c|}\cdot \sup(|c|\cdot f) \Rightarrow$

$\Rightarrow |c|\cdot \sup f \le \sup(|c|\cdot f)$ ⊛⊛

άρα από ⊛ και ⊛⊛ ισχύει η (vi)

vii) $\left.\begin{cases} \inf f \leq f(x) \\ \inf g \leq g(x) \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)+g(x) \geq \inf f + \inf g \Rightarrow$

$\Rightarrow (\inf f + \inf g)$ κφ της $(f+g)$

$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$

viii) $\inf f = \inf\left((f+g)-g\right) = \inf\left((f+g)+(-g)\right)$

$\xRightarrow{(vii)} \inf(f+g) + \inf(-g) \leq \inf\left((f+g)+(-g)\right) \Rightarrow$

$\xRightarrow{(i)} \inf(f+g) - \sup g \leq \inf f \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf(f+g) \leq \inf f + \sup g$

ix)

Από (vii) $\inf(f+c) \geq \inf f + c$

Από (viii) $\inf(f+c) \leq \inf f + c$

Άρα, ισχύει η (ix)

x) Για $c=0$, ισχύει

Για $c \neq 0$, $(\forall x \in A)$: $|c| \cdot f(x) \geq |c| \cdot \inf f \Rightarrow$

$\Rightarrow |c| \cdot \inf f \leq (|c| \cdot f)(x) \Rightarrow |c| \cdot \inf f$ κφ $(|c| \cdot f)$

Άρα, $|c| \cdot \inf f \leq \inf(|c| \cdot f)$ ⊕

$f = \frac{1}{|c|} \cdot |c| \cdot f \Rightarrow \inf f = \inf\left(\frac{1}{|c|}(|c| \cdot f)\right) \xRightarrow{\oplus}$

$\xRightarrow{\oplus} \frac{1}{|c|} \cdot \inf(|c| \cdot f) \leq \inf\left(\frac{1}{|c|} \cdot (|c| \cdot f)\right) = \inf f \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf(|c| \cdot f) \leq |c| \cdot \inf f$ ⊕⊕

Άρα, από ⊕ και ⊕⊕ ισχύει η (x)